Двадцатый Первый Российский Фестиваль юных математиков

Решения Лиги стратегий.

1. Ответ: один. Заметим, что совсем без квадратов 1×1 обойтись не удастся. Действительно, предположим противное и поставим в клетках столбцов с нечетными номерами -1, а с четными — $+1$. Общая сумма будет равна 23, а сумма в каждом квадрате 2×2 и 3×3 будет делиться на 3 — противоречие.
Одного квадрата 1×1 достаточно. Поместим его в центр, остаток естественным образом разбивается на 4 прямоугольника 11×12, каждый из которых в свою очередь разбивается на один прямоугольник 3×12 и 4 прямоугольника 2×12, а их уже легко разбить на квадраты 3×3 и 2×2 соответственно.

2. Положим $R = BF \cap AE$. Хорошо известно, что прямые EA и EO_x симметричны относительно биссектрисы угла BEX (эти прямые содержат высоту и диаметр описанной окружности треугольника BEM). Запишем это как $\angle REX = \angle O_xEB$ (вообще говоря, углы следует рассматривать направленные). Из вписанности имеем $\angle XBR = \angle REX = \angle O_xEB = \angle O_xBE$. Таким образом, точка O_x изогонально сопряжена R в треугольнике XBE. Значит, рассматривая изогональное сопряжение относительно треугольника XYZ, получаем, что надо доказать следующее: прямые XR и две аналогичные проходят через одну точку. Докажем, что полюса этих прямых относительно окружности $ABCDEF$ лежат на одной прямой. Полюсом прямой XR будет точка $AF \cap BE$. Такие три точки лежат на одной прямой в силу теоремы Паскаля для шестиугольника $AFCBED$.

3. Положим $F(n, d)$ — количество таких непустых подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, что НОД всех элементов такого подмножества и числа n равен d. Заметим, что $F(n, d) = F(n/d)$ (биекция устанавливается путем деления всех чисел на d). Поэтому

$$2^n - 1 = \sum_{d|n} F(n, d) = \sum_{d|n} F(n/d) = \sum_{d|n} F(d).$$

4. Случай 1, $|v| \geqslant 1$.

$$|u_1 - v| + |u_2 - v| + \ldots + |u_n - v| \geqslant (u_1 - v) \cdot (-v)/|v| + (u_2 - v) \cdot (-v)/|v| + \ldots + (u_n - v) \cdot (-v)/|v| =$$
$$= n|v| - v \cdot (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = n|v| \geqslant n$$

Случай 2, $|v| \leqslant 1$.

$$|u_1 - v| + |u_2 - v| + \ldots + |u_n - v| \geqslant (u_1 - v) \cdot \frac{u_1}{|u_1|} + (u_2 - v) \cdot \frac{u_2}{|u_2|} + \ldots + (u_n - v) \cdot \frac{u_n}{|u_n|} =$$
$$= |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| - v \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{|u_k|} = n + \sum_{k=1}^{n} (|u_k| - 1) + v \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(u_k + \frac{u_k(1 - |u_k|)}{|u_k|} \right) =$$
$$n + \sum_{k=1}^{n} (|u_k| - 1) \left(1 - v \cdot \frac{u_k}{|u_k|} \right) \geqslant n$$

5. Пусть CPQ — образ треугольника CTA при повороте на $\pi/3$ с центром в точке C (в такую сторону, что праивльный треугольник ACQ лежит вне ABC). Тогда точки B, T, P, Q лежат на одной прямой, $TP = TC$, $PQ = AT$ из равенства треугольников CTA и CPQ. Таким образом, $TA + TB + TC = PQ + TP + TB = BQ$. Пусть теперь точка K такова, что M — середина AK, то есть $ACKB$ — паралеллограмм. Тогда треугольники ABK и BAQ равны по двум сторонам и углу $2\pi/3$ между ними, так что $2AM = AK = BQ$.

6. Будем доказывать индукцией по m. Причем будем заранее считать, что $m \leqslant N$, где N фиксировано, $a \geqslant 2$ (для $a = 1$ очевидно) и искать решение $x > N - b$.
База: для $m = 1$ это очевидно, причем x можно брать любым.
Переход: Пусть $x = a^{y+b}$, тогда $a^{a^{y+b}+b} - a^{y+b} = a^{y+b}(a^{a^{y+b}-y} - 1) \; \vdots \; m$ Пусть $m = m_1 \cdot m_2$, где m_2 содержит все простые делители которые есть и в a тоже, а m_1 это простые, которых в a нет. Если $y + b > N$, то очевидно a^{y+b} делится на m_2(степень вхождения любого простого не меньше чем N, что больше чем может быть у m_2). Теперь если $a^{y+b} - y \; \vdots \; \varphi(m_1)$, такое есть по предположению индукции, то $a^{a^{y+b}+b} - a^{y+b} \; \vdots \; m$. Причем если $y > N - b$, то $x > a^{N-b} > 2^{N-b} \geqslant N - b$.

7. Заметим, что $a^{(b^c)} = a^{b^c} = (b^a)^c = (b^c)^a$. Пусть $b^c = x$, тогда $x^a = a^x$. Утверждение: Если $x^y = y^x$ и x и y натуральные числа, то либо $x = y$, либо это 2 и 4 в произвольном порядке. Из утверждения следуют ответы: (b^c, b, c), $(2, 4, 1)$, $(2, 2, 2,)$ и $(4, 2, 1)$. *Доказательство утверждения:* Если $x^y = y^x$, то существует такое z, что $x = z^p$, $y = z^q$ (легко видеть, что $z = \sqrt[\frac{x}{(x,y)}]{y}$, $p = \frac{x}{(x,y)}$, $q = \frac{y}{(x,y)}$) то есть $z^p \cdot q = z^q \cdot p$, $z^{p-q} = \frac{p}{q}$, откуда из неравенства Бернулли следует требуемое.

8. Докажем сначала для $k = 2$. Индукция по числу ребер. Если в графе есть цикл, выкинем его, покрасим оставшееся по индукционному предположению, а ребра цикла — через один (это возможно, ведь цикл четный). Если же граф есть дерево, удалим ребро, ведущее в висячую вершину, покрасим остальное, а затем подберем цвет этого ребра. Пусть теперь $k > 2$. Назовем характеристикой покраски количество пар одноцветных ребер с общим концом. Покрасим граф так, чтобы характеристика была наименьшей (это все равно, что минимизировать сумму квадратов всех степеней всех одноцветных графов). Докажем, что эта покраска подойдет. В самом деле, если для какой-то вершины количества ребер каких-то двух цветов отличается больше, чем на 1, Рассмотрим только ребра этих двух цветов и перекрасим их согласно случаю $k = 2$. Заметим, что характеристика при этом строго уменьшилась (в каждой вершине количество пар одноцветных ребер с концом в этой вершине не увеличилось, хотя бы в одной — строго уменьшилось).

9. Перепишем данное неравенство как $(1-b^2)(1-c^2) \geqslant (a-bc)^2$. Имеем

$$(1-b^{2n})(1-c^{2n}) = (1-b^2)(1-c^2)(1+b^2+(b^2)^2+\cdots+(b^{n-1})^2)(1+c^2+(c^2)^2+\cdots+(c^{n-1})^2) \geqslant$$
$$\geqslant (1-b^2)(1-c^2)(1+|bc|+|b^2c^2|+\cdots+|b^{n-1}c^{n-1}|)^2 \geqslant$$
$$(a-bc)^2(a^{n-1}+a^{n-2}bc+\cdots+(bc)^{n-1})^2 = (a^n-(bc)^n)^2.$$

(первое неравенство есть неравенство Коши-Буняковского). Полученное неравенство равносильно требуемому.

10. Заметим что если подставить $x = y = -1$, то мы получим что $f(p) = 0$, для некоторого p. Подставим в исходное уравнение $x = p - f(y)$, получим $f(y + f(p)) = p - f(y) + 2y + 3$, откуда $f(y) = \frac{p+2y+3}{2}$, если принять $y = p$ получим, что $p = -1$, откуда $f(y) = y + 1$. Функция $f(y) = y + 1$ очевидно подходит.

Решения Лиги тактик.

2. Заметим, что из условия $\angle BAC = \angle KMC$ следует, что $\angle MAC = \angle MBA$. Получившиеся равенства углов означают, что AC является касательной к описанным окружностям треугольников KMC и ABM. Следовательно, $AK \cdot AM = AC^2 = CB \cdot CM = BM \cdot BC$. Последнее равенство выполняется, так как M — середина стороны BC. Равенство $AK \cdot AM = BM \cdot BC$ означает, что степени точек A и B относительно окружности KMC равны. Тем самым они равноудалены от центра этой окружности.

4. Напишем неравенство треугольника: $\sum |u_i - v| \geqslant |\sum(u_i - v)| = |\sum u_i - nv| = |-nv| = n|v| \geqslant n \cdot 1 = n$.

5. Обозначим $\angle B = 2\beta$ и $\angle C = 2\gamma$. Предположим противное, пусть $\beta < \gamma$. Тогда $\angle BAD > \angle CAD$ и, следовательно $\sin\angle BAD = \frac{BD}{AB} > \frac{CD}{CA} = \sin\angle CAD$. Следовательно, точка E лежит на высоте AD выше, чем точка F. Отсюда мы получаем, что при отражении треугольника CFD относительно прямой AD получится треугольник, лежащий внутри треугольника ABD. Тем самым $BE > CF$, что приводит к противоречию.

6. Пусть в нашем числе n цифр. Поставим на последние 4 места цифры 1, 3, 7, 9, а на первые $n-4$ места расставим оставшиеся цифры как угодно. Покажем, что, переставляя последние 4 цифры, можно получить любой остаток при делении на 7. Числа 1793, 3719, 1739, 1397, 1937, 1973 и 1379 дают все отстатки по модулю 7 — от 0 до 6. Поэтому если исходное число имеет вид $\overline{A1379}$, и число $\overline{A0000}$ при делении на 7 дает остаток r, то переставив цифрф 1, 3, 7, 9 так, чтобы полученное четырехзначное число давало остаток $7 - r$, мы решим задачу.

9. Заметим, что при произвольных a, b выполнено неравенство $a^3b + ab^3 \leqslant a^4 + b^4$ (вытекающее из неравенства $(a^3 - b^3)(a - b) \geqslant 0$), откуда для положительных a, b получаем $\frac{a^2+b^2}{a^4+b^4} \leqslant \frac{1}{ab} = c$. Последнее равенство следует из условия $abc = 1$. Складывая три таких неравенства, получаем требуемое.